

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ
ВІННИЦЬКИЙ ТЕХНІЧНИЙ КОЛЕДЖ**

ОБОВ'ЯЗКОВА КОНТРОЛЬНА РОБОТА

з дисципліни

Дискретна математика

для студентів спеціальності:

5.05010201 «Обслуговування комп'ютерних систем і мереж»

Розглянуто і схвалено
на засіданні циклової комісії

Протокол № ____ від _____ 20__ р.

Голова циклової комісії _____

2014 рік

М.В. Непийвода

ДИСКРЕТНА МАТЕМАТИКА

Методична розробка

„Обов’язкова контрольна робота для визначення поточного
рівня знань студентів”

по темам:

«Множини, функції та відношення»

«Рекурентні співвідношення»

«Логіка висловлювань»

«Булева алгебра»

Технічний коледж

м. Вінниця

2014 р.

АНОТАЦІЯ

до завдань контрольної роботи з навчальної дисципліни «Дискретна математика» освітньо-професійної підготовки молодших спеціалістів з спеціальності 5.05010201 «Обслуговування комп'ютерних систем і мереж»

В основу даної контрольної роботи покладено навчальну програму з нормативної дисципліни «Дискретна математика».

Історія дискретної математики налічує понад дві тисячі років. Сучасний період є одним із найінтенсивніших у її розвитку: дуже швидко розширюється сфера застосування, зростають обсяги нової інформації та кількість нових результатів. Якщо порівняно недавно ця наука була сферою інтересів лише вузького кола фахівців, то нині вона перетворюється на наукову дисципліну, дуже важливу і потрібну для багатьох, а у сфері сучасної освіти – для всіх. Масове використання обчислювальної техніки (персональних комп'ютерів) значно розширює сферу прикладних досліджень, у яких все більше застосовують апарат дискретної математики. Інженери-математики та програмісти, які займаються прикладними дослідженнями, виявляють все більшу зацікавленість у використанні апарату дискретної математики, що пояснюється широким застосуванням комп'ютерної техніки та інформаційних технологій.

Програма дисципліни “Дискретна математика” передбачає вивчення властивостей довільних структур (множин, множин з операціями, відносини, аксіомами тощо), які з'являються як у самій математиці, так і в області її застосувань.

В результаті вивчення предмету у студентів повинні бути сформовані певні знання та практичні навички у відповідності до вимог кваліфікаційної характеристики.

Для успішного виконання контрольної роботи необхідні вивчення та проробка навчального матеріалу:

- підручника;
- конспекту лекцій;
- методичних посібників.

КРИТЕРІЇ ОЦІНЮВАННЯ
виконання завдань
обов'язкової контрольної роботи

Оцінки **«відмінно»** заслуговує студент, який показав систематичне та глибоке знання питань матеріалу не тільки в обсязі матеріалу лекцій та семінарських занять, але й матеріалів, рекомендованих для самостійної роботи, а також додаткової літератури. При цьому студент повинен продемонструвати вміння аналізувати інформацію, проявити творчі здібності в розумінні матеріалу і розв'язку задачі.

Оцінки **«добре»** заслуговує студент, який показав належне знання навчальної програми курсу, виконав усі завдання, при цьому допустив незначні помилки і мав невеликі недоліки. Як правило, оцінка «добре» ставиться студентам, які показали систематичний характер знань з дисципліни, вміють самостійно робити висновки та показали належний рівень знання рекомендованої літератури.

Оцінки **«задовільно»** заслуговує студент, який показав знання основного матеріалу навчальної програми курсу в обсязі, необхідному для подальшого навчання і професійної діяльності. Студент повинен відповісти на основні питання завдання, показати знання рекомендованої літератури, вміння аналізувати зміст питання. Можливі деякі помилки не принципового характеру.

Оцінку **«незадовільно»** виставляють студентам, які не могли показати необхідний рівень знань для подальшого навчання, допустили значні помилки або взагалі не виконали завдання.

Варіант 1

1. Довести рівності, використовуючи властивості операцій над множинами.

$$(A \setminus B) \cap (A \setminus C) = A \setminus (B \cup C)$$

2. Знайти послідовність $f(n)$, яка задовольняє рекурентному співвідношенню

$$2f(n+2) + 5f(n+1) + 3f(n) = 0$$

при початкових умовах $f(1) = 1, f(2) = 2$.

3. Нехай задано відповідне висловлювання. Необхідно визначити результат дій в даному висловлюванні.

Дано висловлювання:

«Намагаючись згадати переможців минулого турніру, п'ять глядачів, що були на турнірі, заявили наступне:

1. Антон був другим, а Борис п'ятим;
2. Віктор був другим, а Денис третім;
3. Григорій був першим, а Борис третім;
4. Антон був третім, а Євген був шостим;
5. Віктор був третім, а Євген був четвертим.

Пізніше з'ясувалось, що кожний глядач помилився в одному з висловлювань.»
Хто займав яке місце в турнірі?

4. Побудувати таблицю істинності і визначити виконуваність формули:

$$(P \rightarrow Q) \rightarrow ((P \rightarrow \bar{Q}) \rightarrow \bar{P})$$

Варіант 2

1. Довести рівності, використовуючи властивості операцій над множинами.

$$(A \cap B) \setminus (A \cap C) = (A \cap B) \setminus C$$

2. Знайти послідовність $f(n)$, яка задовольняє рекурентному співвідношенню

$$f(n+2) - 3f(n+1) + 2f(n) = 0$$

при початкових умовах $f(1) = 3, f(2) = 7$.

3. Нехай задано відповідне висловлювання. Необхідно визначити результат дій в даному висловлюванні.

Дано висловлювання:

«У Олександрі є 5 подруг: Ксенія, Ірина, Зоя, Уляна та Вікторія. Олександра запросила подружок до себе в гості і з'ясувалось наступне:

1. Якщо Ксенія прийде в гості, то вона завжди бере із собою Ірину;
2. Уляна та Вікторія обіцяли, що одна з них прийде точно;
3. Ірина та Зоя сказали, що із них двох точно прийде одна;
4. Якщо Зоя та Уляна придуть в гості, то тільки разом;
5. Якщо Вікторія прийде в гості, то вона обов'язково бере із собою Ксенію та Уляну.»

Хто прийшов в гості до Олександрі?

4. Побудувати таблицю істинності і визначити виконуваність формули:

$$P \wedge (Q \wedge (\bar{P} \vee \bar{Q}))$$

Варіант 3

1. Довести рівності, використовуючи властивості операцій над множинами.

$$(A \setminus B) \cup (A \setminus C) = A \setminus (B \cap C)$$

2. Знайти послідовність $f(n)$, яка задовольняє рекурентному співвідношенню

$$4f(n+2) + 9f(n+1) + 5f(n) = 0$$

при початкових умовах $f(1) = 1, f(2) = 4$.

3. Нехай задано відповідне висловлювання. Необхідно визначити результат дій в даному висловлюванні.

Дано висловлювання:

«Визначити, хто з чотирьох підозрюваних приймав участь у пограбуванні банку, якщо відомо:

1. Якщо А приймав участь, то і В приймав;
2. Якщо В приймав участь, то або С приймав, або А не приймав;
3. Якщо Д не приймав участь, то А приймав, а С не приймав;
4. Якщо Д приймав участь, то і А приймав»

4. Побудувати таблицю істинності і визначити рівносильність формули:

$$\overline{(P \wedge Q) \vee R} \equiv \overline{R \rightarrow P} \vee \overline{R \rightarrow Q}$$

Варіант 4

1. Довести рівності, використовуючи властивості операцій над множинами.

$$(A \setminus C) \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus C$$

2. Знайти послідовність $f(n)$, яка задовольняє рекурентному співвідношенню

$$4f(n+2) + 7f(n+1) + 3f(n) = 0$$

при початкових умовах $f(1) = 2, f(2) = 1$.

3. Нехай задано відповідне висловлювання. Необхідно визначити результат дій в даному висловлюванні.

Дано висловлювання:

«В місті А живуть люди, які говорять правду. Мешканці міста В, навпаки говорять не правду. На розі двох доріг, які ведуть в місто А та В, мандрівник зустрічає місцевого жителя. Яке питання потрібно задати, на яке є відповідь лише „так” або „ні”, мандрівнику, щоб дізнатись яка дорога веде в А?»

4. Побудувати таблицю істинності і визначити рівносильність формули:

$$P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$$

Варіант 5

1. Довести рівності, використовуючи властивості операцій над множинами.

$$(A \cap B) \setminus (A \cap C) = A \cap (B \setminus C)$$

2. Знайти послідовність $f(n)$, яка задовольняє рекурентному співвідношенню

$$f(n+2) + 4f(n+1) + 3f(n) = 0$$

при початкових умовах $f(1) = 2, f(2) = 4$.

3. Нехай задано відповідне висловлювання. Необхідно визначити результат дій в даному висловлюванні.

Дано висловлювання:

«Робітник повинен стежити за деталями, що рухаються повз нього по конвеєру, він повинен знімати з стрічки конвеєра деякі деталі і пропускати інші. Бригадир сказав йому, щоб він знімав деталі, які задовольняють одночасно ряду умов, а саме:

1. володіють принаймні однією з таких характеристик – викривлені, заржавілі або непофарбовані;
2. нестандартні, заржавілі або і те й інше разом;
3. викривлені, не заржавілі або і те й інше разом;
4. нестандартні, не заржавілі або і те й інше разом;
5. володіють принаймні однією з таких характеристик: викривлені, заржавілі або пофарбовані.

Запропоновану в настільки незручній формі інструкцію робочий спростив до двох характеристик об'єктів.»

Які це характеристики?

6. Побудувати таблицю істинності і визначити рівносильність формули:

$$P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$$

Варіант 6

1. Довести рівності, використовуючи властивості операцій над множинами.

$$(A \setminus C) \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C$$

2. Знайти послідовність $f(n)$, яка задовольняє рекурентному співвідношенню

$$2f(n+2) + 6f(n+1) + 4f(n) = 0$$

при початкових умовах $f(1) = 1, f(2) = 3$.

3. Нехай задано відповідне висловлювання. Необхідно визначити результат дій в даному висловлюванні.

Дано висловлювання:

«Визначте, хто із чотирьох учнів здав іспит, якщо відомо:

1. Якщо перший здав, то і другий здав;
2. Якщо другий здав, то третій здав або перший не здав;
3. Якщо четвертий не здав, то перший здав, а третій не здав;
4. Якщо четвертий здав, то і перший здав».

4. Побудувати таблицю істинності і визначити виконуваність формули:

$$(P \Rightarrow Q) \sim (\bar{Q} \Rightarrow \bar{P})$$

Варіант 7

1. Довести рівності, використовуючи властивості операцій над множинами.

$$(A \setminus C) \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus C$$

2. Знайти послідовність $f(n)$, яка задовольняє рекурентному співвідношенню

$$3f(n+2) - 8f(n+1) + 5f(n) = 0$$

при початкових умовах $f(1) = 10$, $f(2) = 20$.

3. Нехай задано відповідне висловлювання. Необхідно визначити результат дій в даному висловлюванні.

Дано висловлювання:

«Брауну, Джонсу і Сміту пред'явлено звинувачення в співучасті в пограбуванні банку. Викрадачі втекли на автомобілі, яка чекала їх. На слідстві Браун показав, що злочинці були на синьому "Бьюїк"; Джонс сказав, що це був чорний "Крайслер", а Сміт стверджував, що це був "Форд Мустанг" і ні в якому разі не синій. Стало відомо, що бажаючи заплутати слідство, кожен з них вказав правильно або тільки марку машини, або її колір.»

Якого кольору був автомобіль і якої марки?

4. Побудувати таблицю істинності і визначити виконуваність формули:

$$PQ \vee \overline{PR} \vee QR = PQ \vee \overline{PR}$$

Варіант 8

1. Довести рівності, використовуючи властивості операцій над множинами.

$$(A \cup B) \setminus (A \cap C) = (A \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap B)$$

2. Знайти послідовність $f(n)$, яка задовольняє рекурентному співвідношенню

$$2f(n+2) - 10f(n+1) + 12f(n) = 0$$

при початкових умовах $f(1) = 3, f(2) = 27$.

3. Нехай задано відповідне висловлювання. Необхідно визначити результат дій в даному висловлюванні.

Дано висловлювання:

«На двері деканату зловмисники олійною фарбою намалювали кілька карикатур на викладачів. Підозра лягла на відомих хуліганів і вільнодумців Пашу і Сашу. Крім того виявилися три свідка, які заявили:

Перший: Це вони зробили разом;

Другий: Малював на двері тільки Саша, Паша в цьому не брав участь;

Третій: Якщо Паша малював на двері, то Саша теж брав у цьому участь.»

Який висновок можна зробити зі свідчень свідків, якщо з'ясувалося, що всі вони брехали, тобто говорили прямо протилежне тому, що було насправді?

4. Побудувати таблицю істинності і визначити виконуваність формули:

$$\overline{P \rightarrow Q \vee R} = P \& \bar{Q} \& \bar{R}$$

Варіант 9

1. Довести рівності, використовуючи властивості операцій над множинами.

$$(A \setminus B) \setminus (A \cap C) = (A \setminus C) \setminus B$$

2. Знайти послідовність $f(n)$, яка задовольняє рекурентному співвідношенню

$$f(n+2) + 5f(n+1) + 4f(n) = 0$$

при початкових умовах $f(1) = 3, f(2) = 9$.

3. Нехай задано відповідне висловлювання. Необхідно визначити результат дій в даному висловлюванні.

Дано висловлювання:

«Під час перерви в класі були Аня, Борис, Ваня і Маша. Один з них розбив вікно. Вчитель став їх питати і отримав від кожного три відповіді.

Аня:

1. Я його не розбивала.
2. Я сиділа і читала.
3. Маша знає, хто розбив.

Борис:

1. Я цього не робив.
2. З Машею я давно не розмовляю.
3. Це зробив Ваня.

Ваня:

1. Я невинний.
2. Розбила Маша.
3. Борис бреше, говорячи, що розбив я.

Маша:

1. Я не розбивала вікно.
2. Це вина Ані.
3. Борис знає, що я не винна, тому що ми з ним розмовляли під час перерви.

Зрештою кожен з них зізнався, що із трьох відповідей, які він дав, два істинні, а одне хибне.»

Хто розбив вікно?

4. Побудувати таблицю істинності і визначити виконуваність формули:

$$(P \rightarrow (Q \vee R)) \& ((P \& Q) \rightarrow R) = P \rightarrow Q$$

Варіант 10

1. Довести рівності, використовуючи властивості операцій над множинами.

$$(A \setminus B) \setminus (A \cap C) = (A \setminus C) \setminus B$$

2. Знайти послідовність $f(n)$, яка задовольняє рекурентному співвідношенню

$$f(n+2) - 5f(n+1) + 6f(n) = 0$$

при початкових умовах $f(1) = 1, f(2) = -7$.

3. Нехай задано відповідне висловлювання. Необхідно визначити результат дій в даному висловлюванні.

Дано висловлювання:

«Після обговорення складу учасників експедиції вирішено, що повинні виконуватися дві умови:

1. Якщо поїде Арбузов, то повинні їхати Брюквин або Вишневський

2. Якщо поїдуть Арбузов і Вишневський то поїде Брюквин»

Хто стане учасником експедиції?

4. Побудувати таблицю істинності і визначити виконуваність формули:

$$P \wedge Q \Rightarrow (Q \wedge \bar{P} \Rightarrow R \wedge Q)$$

Еталон відповіді на «відмінно»

Варіант 10

1. Довести рівності, використовуючи властивості операцій над множинами.

$$(A \setminus B) \setminus (A \cap C) = (A \setminus C) \setminus B$$

Примітка. Для доведення даної рівності необхідно пам'ятати основні операції над множинами.

1. Комутативність

$$A \cup B = B \cup A;$$

$$A \cap B = B \cap A.$$

2. Асоціативність

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C);$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$$

3. Дистрибутивність

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C);$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

4. Ідемпотентність

$$A \cap A = A; \quad A \cup A = A.$$

5. Двоїстості (закони де Моргана)

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}; \quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

6. Операції з пустими множинами

$$A \cup \emptyset = A; \quad A \cap \emptyset = \emptyset$$

7. Операції з універсальною множиною

$$A \cup U = U, \quad A \cap U = A$$

8. Операції з доповненням

$$\overline{\overline{A}} = A, \quad A \cup \overline{A} = U, \quad A \cap \overline{A} = \emptyset$$

9. Визначення різниці через перетин

$$A \setminus B = A \cap \overline{B}$$

10. Поглинання

$$A \cup (A \cap B) = A; \quad A \cap (A \cup B) = A$$

$$\begin{aligned} (A \setminus B) \setminus (A \cap C) & \stackrel{\text{в-ть } 9}{=} (A \setminus B) \cap \overline{(A \cap C)} \stackrel{\text{в-ть } 5,9}{=} (A \cap \overline{B}) \cap (\overline{A} \cup \overline{C}) \stackrel{\text{в-ть } 3}{=} \\ & = (A \cap \overline{B} \cap \overline{A}) \cup (A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \stackrel{\text{в-ть } 1,2}{=} (A \cap \overline{A} \cap \overline{B}) \cup (A \cap \overline{C} \cap \overline{B}) \stackrel{\text{в-ть } 2,8}{=} \\ & = (\emptyset \cap \overline{B}) \cup ((A \cap \overline{C}) \cap \overline{B}) \stackrel{\text{в-ть } 1,6,9}{=} \emptyset \cup ((A \setminus C) \cap \overline{B}) \stackrel{\text{в-ть } 9}{=} \\ & = \emptyset \cup ((A \setminus C) \setminus B) \stackrel{\text{в-ть } 1,6}{=} (A \setminus C) \setminus B. \end{aligned}$$

Отже, рівняння $(A \setminus B) \setminus (A \cap C) = (A \setminus C) \setminus B$ доведено.

2. Знайти послідовність $f(n)$, яка задовольняє рекурентному співвідношенню

$$f(n+2) - 5f(n+1) + 6f(n) = 0$$

при початкових умовах $f(1) = 1, f(2) = -7$.

Для вирішення даного рекурентного співвідношення складаємо характеристичне рівняння:

$$x^2 - 5x - 6 = 0$$

корені даного рівняння є: $x_1 = 2$ та $x_2 = 3$.

Загальне рішення буде мати вигляд:

$$f(n) = C_1 * 2^n + C_2 * 3^n$$

Підставляємо початкові дані і вирішуємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 2C_1 + 3C_2 = 1 \\ 4C_1 + 9C_2 = -7 \end{cases}$$

З рівняння знаходимо $C_1 = 5$ та $C_2 = -3$.

Підставляємо значення постійних C_1 та C_2 в загальний розв'язок рівняння, тим самим знаходимо необхідну задану послідовність $f(n) = 5 * 2^n - 3 * 3^n$.

3. Нехай задано відповідне висловлювання. Необхідно визначити результат дій в даному висловлюванні.

Дано висловлювання:

«Після обговорення складу учасників експедиції вирішено, що повинні виконуватися дві умови:

1. Якщо поїде Арбузов, то повинні їхати Брюквин або Вишневський
2. Якщо поїдуть Арбузов і Вишневський то поїде Брюквин»

Хто стане учасником експедиції?

Для визначення результату дій даного висловлювання (тобто хто стане учасником експедиції?) необхідно скласти логічну формулу ухвалення рішення в символічній формі, а також спрощуємо отриману формулу і формулюємо по ній нове умова формування експедиції.

Введемо змінні і відповідні їм елементарні висловлювання.

A – Поїде Арбузов

B – Поїде Брюквин

C – Поїде Вишневський

Тоді вироблені умови формування експедиції будуть виглядати наступним чином:

1. $A \rightarrow (B \vee C)$

2. $(A \& C) \rightarrow B$

Складемо загальну формулу і спростимо вираз

$$(A \rightarrow (B \vee C)) \& ((A \& C) \rightarrow B) = (\bar{A} \vee B \vee C) \& (\bar{A} \& \bar{C} \vee B) = (\bar{A} \vee B \vee C) \& (\bar{A} \vee \bar{B} \vee B) = (\bar{A} \vee B) \& (B \vee \bar{B}) = (\bar{A} \vee B) = A \rightarrow B$$

Відповідь: якщо поїде Арбузов, то поїде Брюквин.

4. Побудувати таблицю істинності і визначити виконуваність формули:

$$P \wedge Q \Rightarrow (Q \wedge \bar{P} \Rightarrow R \wedge Q)$$

Будуємо таблицю істинності:

P	Q	R	$P \wedge Q$	$Q \wedge \bar{P}$	$R \wedge Q$	$Q \wedge \bar{P} \Rightarrow R \wedge Q$	$P \wedge Q \Rightarrow (Q \wedge \bar{P} \Rightarrow R \wedge Q)$
0	0	0	0	0	0	1	1
0	0	1	0	0	0	1	1
0	1	0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	1	1
1	0	1	0	0	0	1	1
1	1	0	1	1	0	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Отже, дана формула є загальнозначущою, так як вона істинна при будь-яких значеннях P, Q та R.

Література

1. Аляев Ю.А., Тюрин С.Ф. «Дискретная математика и математическая логика»: учебник. – М.: Финансы и статистика, 2006. – 368 с.: ил.
2. Белоусов А.И., Ткачев С.Б «Дискретная математика», Учебник для вузов. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2004. – 744 с.
3. Битюцкий В.П., Соколов С.С. «Основы дискретной математики: учебное пособие по дисциплине «Дискретная математика» Ч. 1.». – Екатеринбург: ГОУ ВПО УГТУ-УПИ, 2005. – 96 с.
4. Ерусалимский Я.М. «Дискретная математика: теория, задачи, приложения», 3-е издание. – М.: Вузовская школа, 2000 – 280 с.
5. Кулаков Ю.В., Шамкин В.Н. Дискретная математика: Учебное пособие. – Тамбов: Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2004 – 80 с.
6. Носов В.А. «Комбинаторика и теория графов». Учебное пособие. – М.: МГУ, 1999 – 116 с.
7. Новиков Ф.А. «Дискретная математика для программистов». Учебник для вузов. 2-е изд. – СПб.: Питер, 2007 – 364 с.: ил.
8. Пучков Н.П., Ткач Л.И. «Теория множеств в курсе «Математика» для гуманитарных специальностей». Методические указания. – Тамбов. Издательство ТГТУ, 2004 – 40 с.
9. Яблонский С.В. «Введение в дискретную математику». Учеб. пособие для вузов/ Под ред. В.А. Садовниченко. – 4-е изд., стер. – М.: Высш. шк., 2003 – 384 с.